Cálculo II - Lista Extra Curvas e Funções Vetoriais
Maria José Pacifico-2020
Instituto de Matemática - Universidad Federal do Rio de Janeiro

Funções vetoriais e curvas.

Exercise 1. *Determine o domínio das seguintes funções vetoriais:*
(a) $f(t) = \left(\frac{1}{1-t}, \frac{1}{t}, \cos\frac{1}{t}\right)$.
(b) $f(t) = \left(\sqrt{t-2}, \sqrt{t-1}, \sqrt{t^2-4}\right)$.

Resolução. O domínio de uma função vetorial é a interseção dos domínios das funções coordenadas.
(a) Sejam $f_1(t) = \frac{1}{1-t}$, $f_2(t) = \frac{1}{t}$ e $f_3(t) = \cos\frac{1}{t}$ as funções coordenadas de f. Então

$$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(f_3).$$

Primeiro determinamos $\text{Dom}(f_i)$ para $i = 1, 2, 3$.
$\text{Dom}(f_1)$: Aqui, a única restrição que temos é que $1 - t \neq 0$, ou seja, $t \neq 1$. Logo

$$\text{Dom}(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$\text{Dom}(f_2)$: Esta função coordenada está bem definida só quando $t \neq 0$. Então,

$$\text{Dom}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\text{Dom}(f_3)$: O coseno é uma função que está definida em todos os números reais, então a única restrição está em $1/t$ que, como sabemos, só é válida quando $t \neq 0$.

$$\text{Dom}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Portanto,
$$\text{Dom}(f) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

(b) Como antes, colocamos $f_1(t) = \sqrt{t-2}$, $f_2(t) = \sqrt{t-1}$ e $f_3(t) = \sqrt{x^2-4}$ para as funções coordenadas de f e calculamos os seus respectivos domínios:
$\text{Dom}(f_1)$: Essa função está definida só quando $t - 2 \geq 0$; ou seja, $t \geq 2$, logo

$$\text{Dom}(f_1) = [2, \infty).$$

$\text{Dom}(f_2)$: Essa função está definida para $t - 1 \geq 0$, ou seja $t \geq 1$, assim

$$\text{Dom}(f_2) = [1, \infty).$$

$\text{Dom}(f_3)$: Para essa função estar bem definida, precisa-se que $x^2 - 4 \geq 0$. Mas isto acontece quando $t \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; ou seja,

$$\text{Dom}(f_3) = ([2, \infty)) \cap ([1, \infty)) \cap ((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) = [2, \infty). \quad \blacksquare$$

Exercise 2. *Determine $f'(t)$, $f''(t)$ e $\int_0^{2\pi} f(t)dt$ das seguintes funções vetoriais:*
(a) $f(t) = (\cos(t), sen(t))$.
(b) $f(t) = (r(t - sen(t)), r(1 - \cos(t)))$. *onde $r > 0$ é uma constante real.*
(c) $f(t) = (\cos(t^2), sen(t^2))$. *Não calcule a integral.*
(d) $f(t) = (t, \cos(t), sen(t))$.
(e) $f(t) = (\sqrt{5}\cos(t), \sqrt{5}\sin(t), 2t)$.

Exercise 3. *Em cada um dos seguintes exercícios, esboce a curva descrita pelo ponto* (x, y) *onde* x, y *são dados paramétricamente nos intervalos sinalados:*

(a) $x = 2t + 3$, $\quad y = 4t^2 - 9$; $\quad t \in \mathbb{R}$.
(b) $x = 2 + \frac{1}{t}$, $\quad y = 2 - t$; $\quad t > 0$.
(c) $x = t^2 + t$, $\quad y = t^2 - t$; $\quad t \in \mathbb{R}$.
(d) $x = t + 1$, $\quad y = t^2 + 4$; $\quad t \geq 0$.
(e) $x = t^2 - 2t$, $\quad y = t + 1$; $\quad t \geq 0$.

Resolução.

(a) Procuramos as equações cartesianas da curva. Para isso, temos que procurar uma relação entre a variável x e y. Por exemplo, podemos isolar t na equação de $x(t)$,

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t + 3 \\ x(t) - 3 &= 2t \\ t &= \frac{x(t) - 3}{2} \end{aligned}$$

Substituindo este valor de t na equação de $y(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} y(t) &= 4\left(\frac{x(t) - 3}{2}\right)^2 - 9 \\ &= x^2(t) - 6x(t) + 9 - 9 \\ &= x^2(t) - 6x(t) \end{aligned}$$

Aqui podemos dispensar do parámetro t e obtemos simplesmente a equação $y = x^2 - 6x$. Como $t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ atinge qualquer valor real, logo $y = x^2 - 6x$, que representa a curva, é uma parábola com domínio todo $\mathbb{R}$. Para determinar o gráfico dessa curva, encontramos alguns pontos chaves; por exemplo,

- A parábola é aberta para acima, pois o fator de x^2 é $a = 1 > 0$;
- Corte com o eixo x: É fácil ver, da equação $x^2 - 6x = x(x - 6) = 0$ que as raízes (corte com o eixo x) são $x = 0$ e $x = 6$;
- Corte no eixo y: É o ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$; ou seja, passa pela origem;
- O vértice da parábola é $(3, -9)$. O vértice pode ser determinado pela fórmula

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right), \qquad \text{onde} \qquad \triangle = b^2 - 4ac$$

No caso, $a = 1$, $b = -6$ e $c = 0$.
Em suma, temos que desenhar uma parábola aberta para acima e que passa pelos pontos $(0, 0)$, $(6, 0)$ e $(3, -9)$. Eis o gráfico da curva

(c) Isolamos o t da equação de $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 + t \\ t^2 + t - x(t) &= 0 \end{aligned}$$

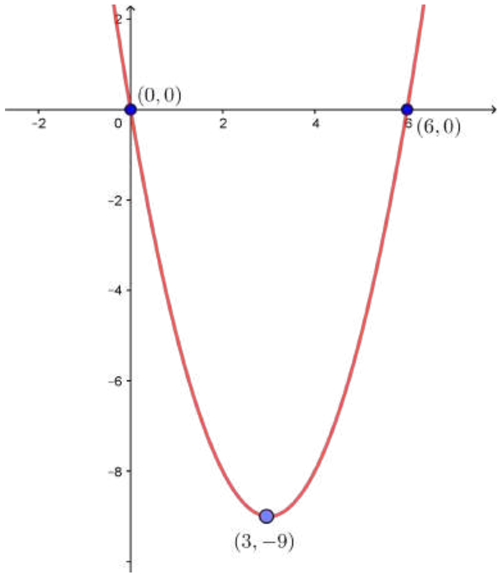

Figure 1: Gráfico da curva: $x(t) = 2t + 3$, $y(t) = 4t^2 - 9$, $t \in \mathbb{R}$.

Essa última equação é uma equação de segundo grau em t. Sabemos que

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x(t)}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Temos então dois valores para t.
Se $t = \frac{-1+\sqrt{1+4x(t)}}{2}$, então

$$y(t) = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4x(t)}}{2}\right)^2 - \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x(t)}}{2} = 1 + x(t) - \sqrt{1 + 4x(t)}.$$

Se $t = \frac{-1-\sqrt{1+4x(t)}}{2}$, então

$$y(t) = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4x(t)}}{2}\right)^2 - \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x(t)}}{2} = 1 + x(t) - \sqrt{1 + 4x(t)}..$$

Agora observe que a condição $t \in \mathbb{R}$ implica que $x(t) \geq -1/4$.
O esboço da curva será o gráfico das funções:

$$f_1(x) = 1 + x - \sqrt{1 + 4x}, \qquad x \geq -1/4$$

e

$$f_2(x) = 1 + x + \sqrt{1 + 4x} \qquad x \geq -1/4.$$

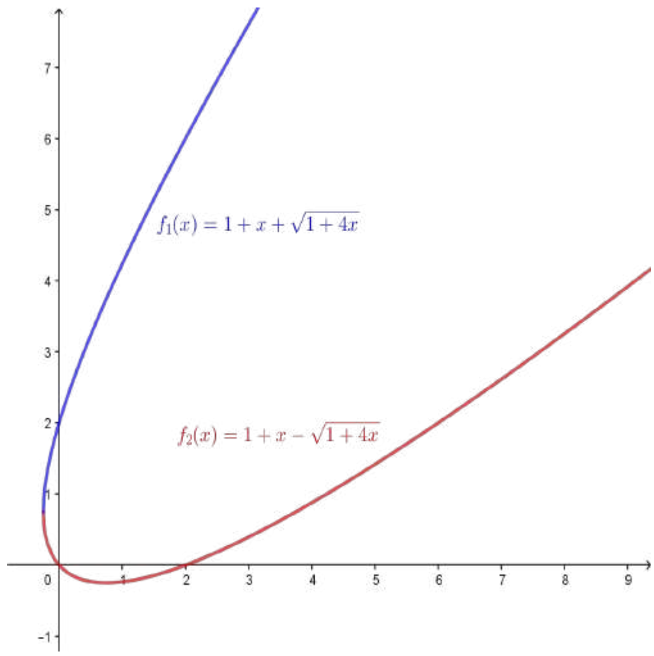

Figure 2: Esboço da curva $x(t) = t^2 + t$, $y(t) = t^2 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercise 4. *Nas seguintes funções vetoriais, esboce o traço $Tr(f)$ e reflita sobre seu gráfico $\Gamma(f)$:*

(a) $f(t) = (\cos(2t), \cos(t))$; $0 \leq t \leq 2\pi$.
(b) $f(t) = (\cos(t), sen(t))$; $-4\pi \leq t \leq 4\pi$.
(c) $f(t) = (\sec(t), \tan(t))$ $-\pi/2 < t < \pi/2$.
(d) $f(t) = (2 + 4sen(t), 3 - 2\cot(t))$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução.

(d) Isolamos $sen(t)$ e $\cos(t)$, nas coordenadas paramétricas, para estabelcer a identidade trigonométrica $sen^2(t) + \cos^2(t) = 1$. Então,

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4sen(t) \\ x - 2 &= 4sen(t) \\ \frac{x-2}{4} &= sen(t) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2\cos(t) \\ y - 3 &= -2\cos(t) \\ 3 - y &= 2\cos(t) \\ \frac{3-y}{2} &= \cos(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 = sen^2(t) + \cos^2(t) = \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3-y}{2}\right)^2 = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4}.$$

Que representa uma elipse centrada em $(2,3)$, eixo maior $a = 4$ e eixo menor $b = 2$. O fato de t variar no intervalo $[0, 2\pi]$ diz que o traço da curva deve ser todo o gráfico da elipse encontrada. ■

Figure 3: Traço da curva parametrizada $f(t) = (2 + 4sen(t), 3 - 2\cos(t))$.

Exercise 5. *Obtenha uma paramétrização do semi-círculo*

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y > 0$$

usando como parâmetro o coeficiente angular $t = \frac{dy}{dx}$ *da tangente à curva no ponto* (x, y)

NOTA: O coeficiente angular de uma reta é simplesmente a inclinação. *Resolução.* Derivando implícitamente a equação $x^2 + y^2 = 1$, obtemos

$$2x + 2yy' = 0$$

Logo, $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x}{y}$ que seria nosso parâmetro; ou seja

$$t = -\frac{x}{y}, \qquad \text{equivalentemente} \qquad x = -ty$$

Substituindo $x = -ty$ na equação $x^2 + y^2 = 1$, obtemos

$$(-ty^2) + y^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y^2(t^2+1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{t^1+1}}$$

Agora, notando que y deve ser positivo, temos que

$$y = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Portanto, uma parametrização do semi-círculo, usando $t = \frac{dy}{dx}$ como parâmetro, é

$$f(t) = (x, y) = (-ty, y) = \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right). \qquad ■$$

Exercise 6. *Obtenha uma paramétrização do semi-círculo*

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y > 0$$

usando como parâmetro a variável t definida por $x = r\tan(t)$.

Resolução. Substituindo $x = r\tan(t)$ na equação $x^2 + y^2 = r^2$ obtemos

$$\begin{aligned} r^2\tan^2(t) + y^2 &= r^2 \\ y^2 &= r^2 - r^2\tan^2(t) \\ y^2 &= r^2(1 - \tan^2(t)) \\ y &= \pm\sqrt{r^2(1 - \tan^2(t))} \\ y &= \pm r\sqrt{1 - \tan^2(t)} \end{aligned}$$

Usando o fato que $y > 0$, desconsideramos o possível sinal negativo diante da raíz. Então,

$$y = r\sqrt{1 - \tan^2(t)}$$

Portanto, uma parametrização do semi-círculo, usando o parâmetro $x = r\tan(t)$ é

$$f(t) = \left(r\tan(t), r\sqrt{1 - \tan^2(t)}\right). \qquad \blacksquare$$

Exercise 7. *Esboçar a curva parametrizada por $f(t) = (cos(t^2), sen(t^2))$ no intervalo $-\sqrt{\pi} \leq t \leq \sqrt{\pi}$.*

Resolução. É claro que o traço vai ser um arco da circunferência de raio 1 centrada na origem, pois

$$x^2 + y^2 = \cos^2(t^2) + sen^2(t^2) = 1$$

Observe então que quando t varia no intervalo $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$, então t^2 varia só no intervalo de $[0, \pi]$. Vemos que "ângulo" $\alpha(t) = t^2$ varia de π até 0 quando t vai de $-\sqrt{\pi}$ até 0, e logo de 0 até π quando $t \in [0, \sqrt{\pi}]$. Portanto, o traço de $f(t) = (cos(t^2), sen(t^2))$ pode ser esboçado considerando primeiro o intervalo $[-\sqrt{\pi}, 0]$ e logo o intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$.

- $[-\sqrt{\pi}, 0]$. Neste intervalo $\alpha(t)$ vai desde π até 0; quer dizer, $(cos(t^2), sen(t^2))$ nesse intervalo é apenas a semi-circunferência superior indo desde o ponto $(-1, 0)$ até $(1, 0)$ (Veja figura). Pois $f(-\sqrt{\pi}) = (\cos(\pi), sen\pi) = (-1, 0)$ e $f(0) = (\cos 0, sen 0) = (1, 0)$. Isto quer dizer que o curva está sendo traçada de esquerda a direita.

- $[0, \sqrt{\pi}]$. Neste intevalo, o ângulo varia entre 0 e π. Portanto a traço tem que ser a semi-circunferência superior traçada de direita a esquerda

Em suma, o traço de $f(t) = (\cos t^2, sent^2)$ é a semi-circunferência superior de raio uma (percorrida duas vezes). $\blacksquare$

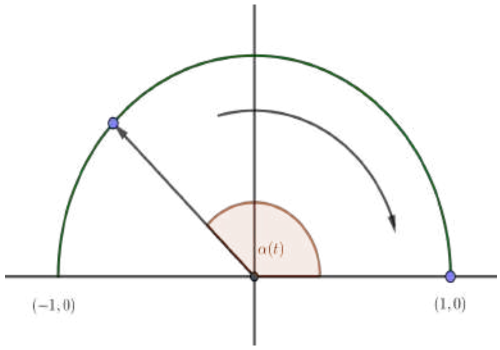

Figure 4: Traço da curva $f(t) = (\cos t^2, sent^2)$ quando $t \in [-\sqrt{\pi}, 0]$.

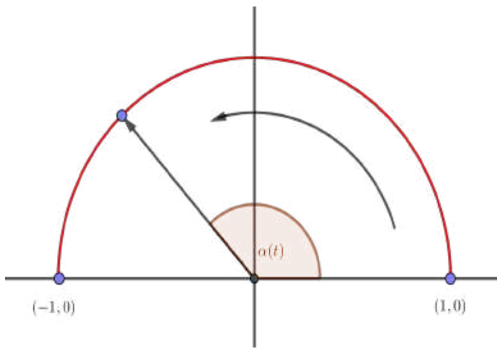

Figure 5: Traço da curva $f(t) = (\cos t^2, sent^2)$ quando $t \in [0, \sqrt{\pi}]$.

Exercise 8. *Suponha que $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ são duas funções vetoriais e $\alpha : I \to \mathbb{R}$ é uma função real. Mostre que:*

(a) $(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t)$.

(b) $(\alpha f)'(t) = \alpha'(t)f(t) + \alpha(t)f'(t)$.

Resolução. Suponhamos que $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ e $g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))$. Então,

(a) Sabemos que a derivada de uma função vetorial é a derivada de cada função componente; isto é,

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)).$$

Assim

$$\begin{aligned}
(f+g)'(t) &= (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), ..., f_n(t) + g_n(t))' \\
&= ((f_1(t) + g_1(t))', (f_2(t) + g_2(t))', ..., (f_n(t) + g_n(t))') \\
&= (f_1'(t) + g_1'(t), f_2'(t) + g_2'(t), ..., f_n'(t) + g_n'(t)) \qquad \text{usando a derivada da soma} \\
&= (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)) + (g_1'(t), g_2'(t), ..., g_n'(t)) \\
&= f'(t) + g'(t).
\end{aligned}$$

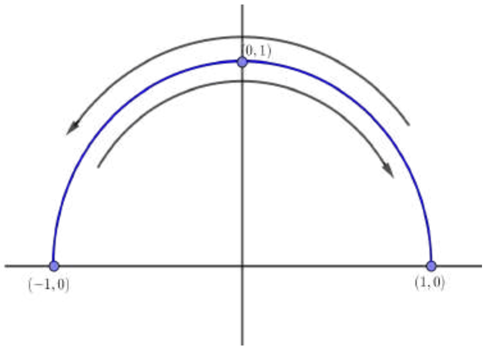

Figure 6: Traço da curva $f(t) = (\cos t^2, sent^2)$ no intervalo $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

(b) Como α é uma função real, temos, por definição, que

$$(\alpha f)(t) = \alpha(t)f(t) = \alpha(t)(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)) = (\alpha(t)f_1(t), \alpha(t)f_2(t), ..., \alpha(t)f_n(t)).$$

Lembre que cada f_i é também uma função de variável real, logo $\alpha(t)f_i(t)$ é um produto de funções de variáveis reais; portanto,

$$\begin{aligned}
(\alpha f)'(t) &= (\alpha(t)f_1(t), \alpha(t)f_2(t), ..., \alpha(t)f_n(t))' \\
&= ((\alpha(t)f_1(t))', (\alpha(t)f_2(t))', ..., (\alpha(t)f_n(t))') \\
&= (\alpha'(t)f_1(t) + \alpha(t)f_1'(t), \alpha'(t)f_2(t) + \alpha(t)f_2'(t), ..., \alpha'(t)f_2(t) + \alpha(t)f_2'(t)) \qquad \text{derivada do produto} \\
&= (\alpha'(t)f_1(t), \alpha'(t)f_2(t), ..., \alpha'(t)f_n(t)) + (\alpha(t)f_1'(t), \alpha(t)f_2'(t), ..., \alpha(t)f_n'(t)) \\
&= \alpha'(t)(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)) + \alpha(t)(f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)) \\
&= \alpha'(t)f(t) + \alpha(t)f'(t)
\end{aligned}$$